ミクロとマクロの世界をつなぐ数学

－非平衡統計力学の普遍的な理解を目指して－

東京大学大学院　数理科学研究科　佐々田槙子

ナイスステップな研究者2024第2回講演会

2025年7月8日

自己紹介

◆小さい頃は、パズルやゲーム（アナログな）が好き

◆中高一貫の女子校で、部活、劇団、バンドなど課外活動を満喫

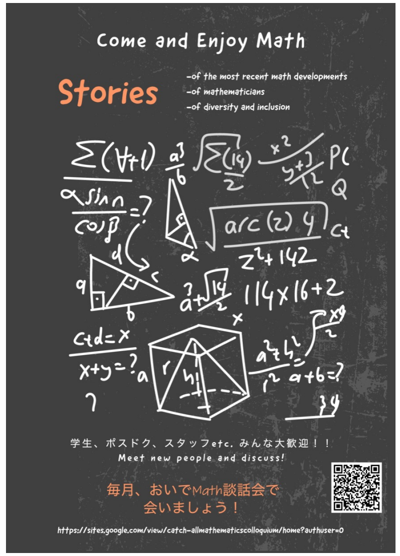
◆大学に入学し、数学好きの友人との出会いに感激！「学び」には仲間がとても大切！

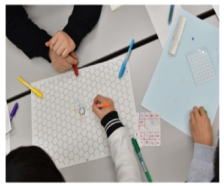
◆**博士課程在学時に、海外訪問・滞在を多く経験し視野が広がる**

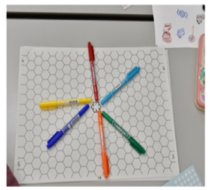
◆統計物理学に関連した**確率論&様々な数学**を研究

◆数学の面白さをたくさんの人と共有したい、というのが一つの夢

◆子育てと研究の両立に奮闘中







現代数学の魅力

- 数学は現象や概念を、客観的で厳密に表現する言葉！
- 国境、時代、属性、肩書き、価値観などの壁を越える普遍性
- 現実世界にとらわれない自由さと豊かさ
- 現象の本質を抜き出すことで得られる高い汎用性

研究の目標

- 目に見える流体や気体等のマクロな現象を、原子・分子等の目に見えないミクロな世界の原理・法則から説明したい

↓

統計力学の数学的な基礎付け

- 統計力学を基礎づける確率論や関連する数学の研究
- 未完成な非平衡統計力学の発展
- 様々な自然科学・社会科学現象への応用

統計力学

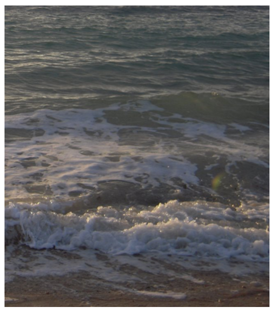
ミクロとマクロの世界をつなぐ理論

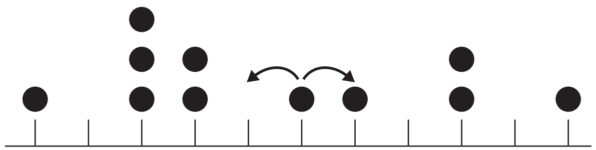
ミクロとマクロとは？

	ミクロ	マクロ
物理量	各分子の位置・運動量, …	密度，圧力，温度, 流体の速度, …
系の自由度	膨大	少数
時間発展	各要素間の複雑な相互作用	偏微分方程式

ミクロとマクロをつなぐとは？

- ミクロな系の様々な物理量のうち、何がその系のマクロな性質を表す量（マクロな物理量）なのかを明らかにする（平衡状態の特徴付け）
- マクロな物理量の時間発展方程式を、ミクロな系の時間発展の法則から導出する





統計力学と確率論

- 「ミクロな世界」とは？

⇒　膨大な数の構成要素、複雑な相互作用

⇒　各構成要素それぞれの情報は現実的には観測不能であると同時に、それぞれの情報自体には“意味がない”

⇒ しかし、そこから得られる平均的な情報には“意味がある”

ミクロな世界は確率的な世界

平衡状態と非平衡状態

- 平衡状態とは．．．

マクロに観測可能な時間変化や（物質，エネルギーの）流れのない状態

- 平衡状態を扱う平衡統計力学は、確率モデルの導入により素晴らしい成功をおさめている

- 非平衡状態とは．．．

マクロに観測可能な時間変化や（物質，エネルギーの）流れがある状態

- 非平衡状態を扱う非平衡統計力学は***<u>まだまだ発展途上</u>***

平衡状態

非平衡状態

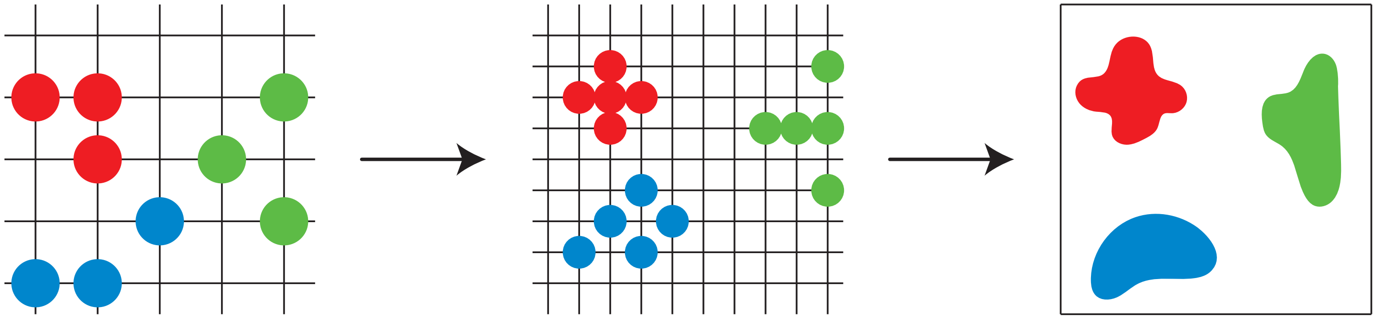
非平衡統計力学の基礎付け

- 多粒子間の相互作用により時間発展するランダムな系（＝確率過程）をミクロモデルとして考える
- ミクロモデルから時空間パラメータのスケール極限としてマクロな系の時間発展を導く

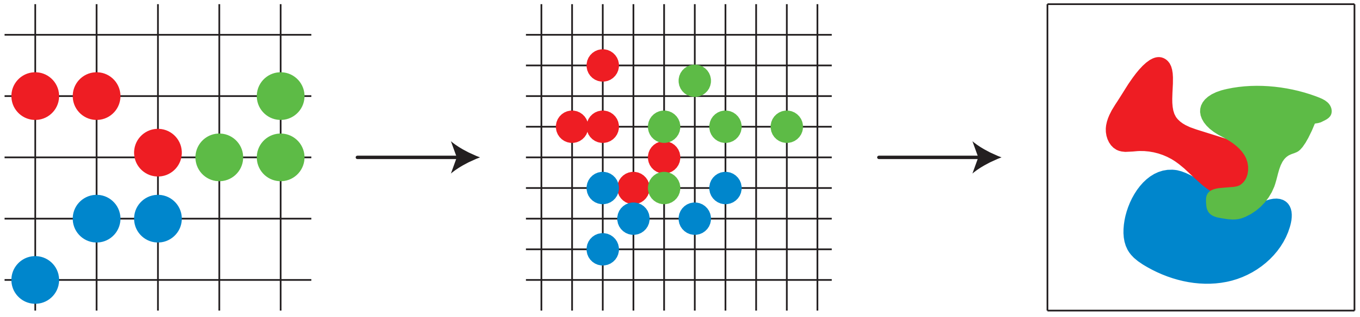
「流体力学極限」：
ミクロモデルとマクロな系の時間発展方程式を厳密な数学により結びつける確率論の手法

流体力学極限のイメージ

時刻 0



時刻 t



数学の考え方と役割

「抽象化」「一般化」により本質を抜き出す

数学の役割

- （新しい or 十分理解できていない）概念・直感に「定義」を与え、客観的で論理的な考察をするための言語を与える
- この「定義」の元で、どのような帰結が得られるのかを解析（＝証明）する
- 解析結果をもとに、概念の拡張や新しい概念を創出する

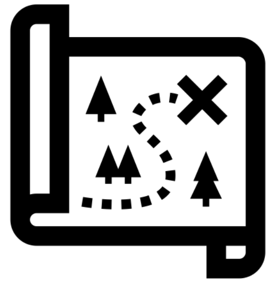
背景（知識や価値観）が異なる人が集まって議論をするため、
また、
新しい概念や複雑な概念を論理的に捉えるためには必須！
概念の抽象化により、新しい応用が多数生まれる。

定義の作り方

- 定義したい概念に関わる例をたくさんあげる
- 定義したい対象に期待される性質をたくさんあげる
- 本質的な性質と思われるものを、大胆に絞ってなるべくシンプルにして定義として採用する
- 作った定義をもとに様々な解析をして、期待している概念を再現できていなければ、定義をし直す

シンプルな定義ほど、本質が明らかになり、
応用が広く深くなりやすい。
付加的な性質は後から付け加えていくとよい。

「距離」：近さを表す概念



- 例：物理的な距離、人間関係の距離、似ている度合い、交通の便

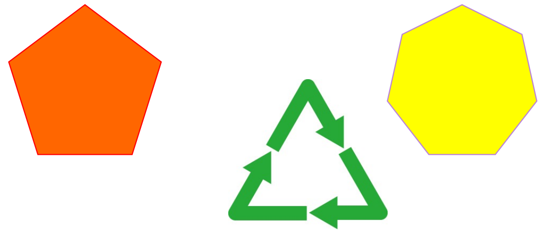
<u>出来上がった定義：</u>

- 条件１：入力は２つ（順序によらない）で出力は０以上の実数
- 条件２：「AとBの距離が０」と「A=B」は同じ
- 条件３：（AとCの距離）≤（AとBの距離）+（BとCの距離）

図形同士の距離を測る、図形の列の収束を論じる、などが可能に。
ネットワークの繋がり方、画像の類似度など、様々な応用。
様々な距離による「地図」の作成も可能。

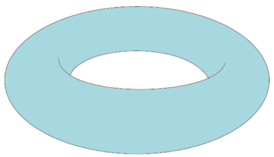
「群」：操作の集まりを表す概念

- 例：足し算、掛け算、図形の線（点）対称、原点をずらす、時間０から時間tの状態への遷移



<u>出来上がった定義：</u>

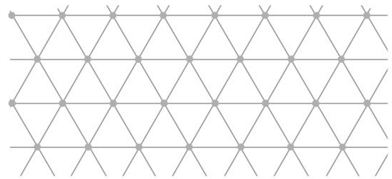
- 条件１：「何もしない」という操作（＝操作０）がある
- 条件２：どんな操作Aに対しても、操作をなかったことにする「逆の操作」が存在する。つまり、Aをして、Aの「逆の操作」をすれば、操作０をしたことになる。
- 条件３：操作Aをしてから操作Bをして、さらに操作Cをすることと、操作Aをしてから、「操作Bをしてから操作Cをする」という操作をすることは同じ



対象の持つ「対称性」を表す。素数を用いた暗号理論、幾何学的な特徴（例えば穴の数）を群で表せるなど様々な応用。

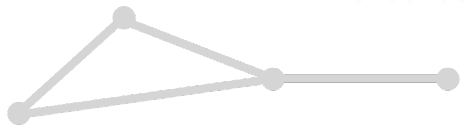
「グラフ」：つながり方を表す概念

- 例：SNSのフォロー関係、路線図、結晶構造



<u>出来上がった定義：</u>

- 条件１：「頂点」と「辺」の組のこと
- 条件２：「辺」は、二つの頂点からなる



様々なネットワークや離散的な空間構造を抽象的に表現できる。
グラフには、「距離」が定まる。
グラフの持つ「対称性」も、群の言葉で表現できる。

「ミクロモデル」の「数理モデル」（＝定義）が必要！

- 「数理モデル」（とその数学的研究）の役割：

複雑な対象の（ある側面の）本質を客観的に深く調べる

  - 「円柱」：タイヤ、ケーキ、電柱
  - 「距離」：物理的な距離、人間関係の近さ、画像の類似度
  - 「確率空間」：降水確率、コイン投げ、株価の変動

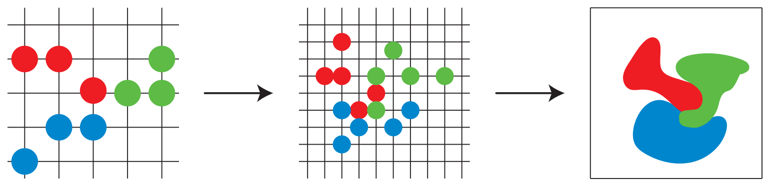
- 「数理モデル」（＝定義）は、厳密に定義されていて、かつ現実の興味ある性質をよく再現することが必要

最近の研究テーマ１

「ミクロモデル」の本質を抜き出す定義を創り、解析する

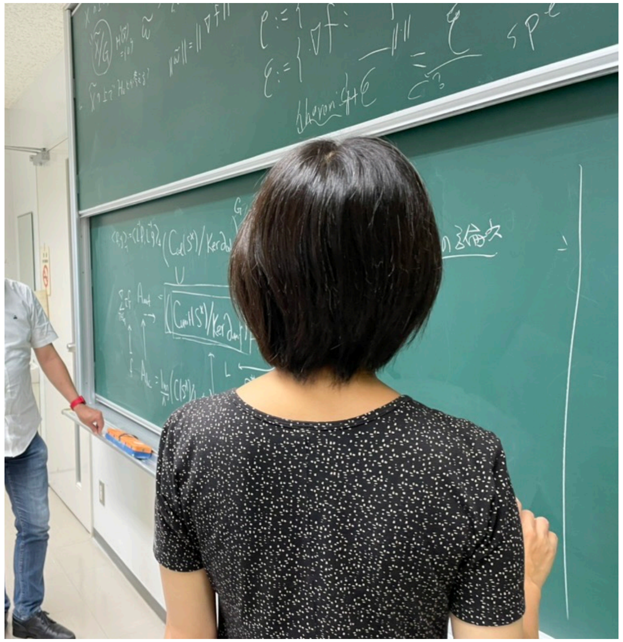
「流体力学極限」の研究の課題

- 個々のミクロモデルについての理解は深まってきた
- ミクロモデルやその解析過程には、多くの共通性がある
- 未解決なミクロモデルも多数ある



「ミクロモデル」の本質的な性質を抜き出して
理論の「抽象化」「一般化」をしたい！

分野を大きくこえた共同研究



◆きっかけは**談話室での雑談**

◆修士課程時代からの疑問が解決！

◆学際的研究会の**帰りの新幹線**が次のきっかけ

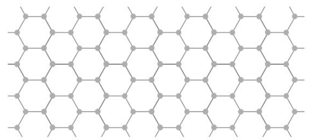
◆Webサイト「数理女子」を共同で立ち上げた研究者と共同研究

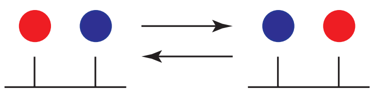
◆「粒子ってなんですか？」

◆共同研究の醍醐味＆難しさ

研究成果１：
ミクロモデルの一般的な定義の導入

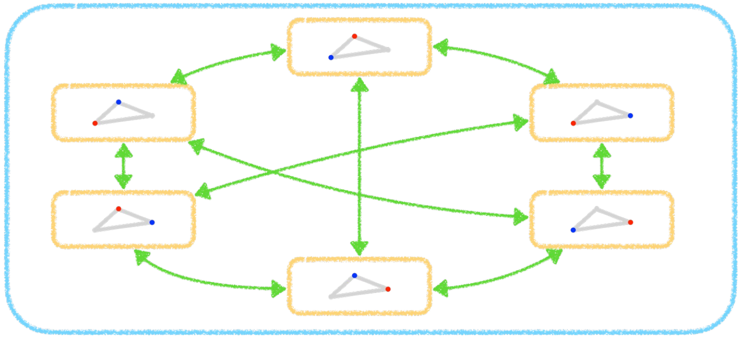
- 流体力学極限で対象とするミクロモデルは、以下の要素から定まる
  - ❖系が局所的にとりうる状態（local state space）
  - ❖系の空間的なつながり方（locale）
  - ❖局所的な相互作用により起こりうる状態の遷移（interaction）
  - ❖局所的な相互作用の起こるスピード(rate)





「幾何的（空間的）データ」と
「確率論的（時間的）データ」の分離

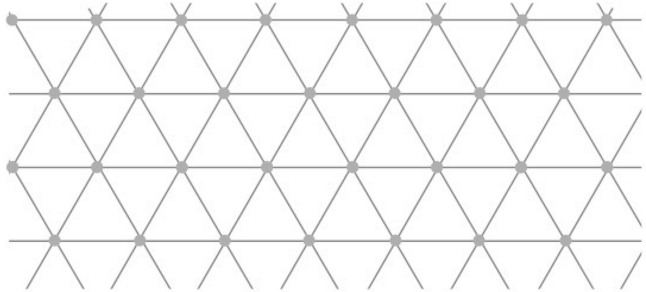
研究成果２：
マクロな物理量の特徴づけ



- 流体力学極限で対象とするミクロモデルの「マクロな物理量」は、モデルの「幾何的データ」から定まる
- Keyとなるアイディア：ミクロモデルの「とりうる状態全体」が「グラフ」となることに注目←幾何学の理論が使える

マクロな物理量は「幾何的データ」から定まる

研究成果３：
対称性の役割の解明



- 流体力学極限で「マクロな物理量」の時間発展を与える「拡散行列の次元」は、「幾何的データ」と、ミクロモデルが持つ対称性を表す「対称性のデータ」から定まる
- 重要なアイディア：対称性は「群」で表される←代数学の理論が使える

拡散行列の次元は
「幾何的データ」と「対称性のデータ」から定まる

研究成果４：
マクロ方程式とミクロモデルとの関係

- 流体力学極限で「マクロな物理量」の時間発展を与える「拡散行列の具体形」は、モデルの「幾何的データ」と「対称性のデータ」と「確率論的データ」から定まる
- 新しくわかったこと：拡散行列は、マクロな物理量の流れについての「幾何的な分解」と「確率論的な分解」の変換行列となっている
→他の数学分野でも類似の現象！深い理解は今後の課題

拡散行列の具体形は
「幾何的データ」と「対称性のデータ」と
「確率論的データ」から定まる

今後の展望

- 現在の枠組みをさらに広げて、より一般の「ミクロモデル」に対する流体力学極限を統一的に理解する
- 「幾何的（空間的）データ」「対称性のデータ」「確率論的（時間的）データ」を分離するアプローチを、流体力学極限以外の様々な統計力学の問題に用いる
- 統計力学以外の「異なるスケール間の現象をつなぐ理論」への拡張や応用

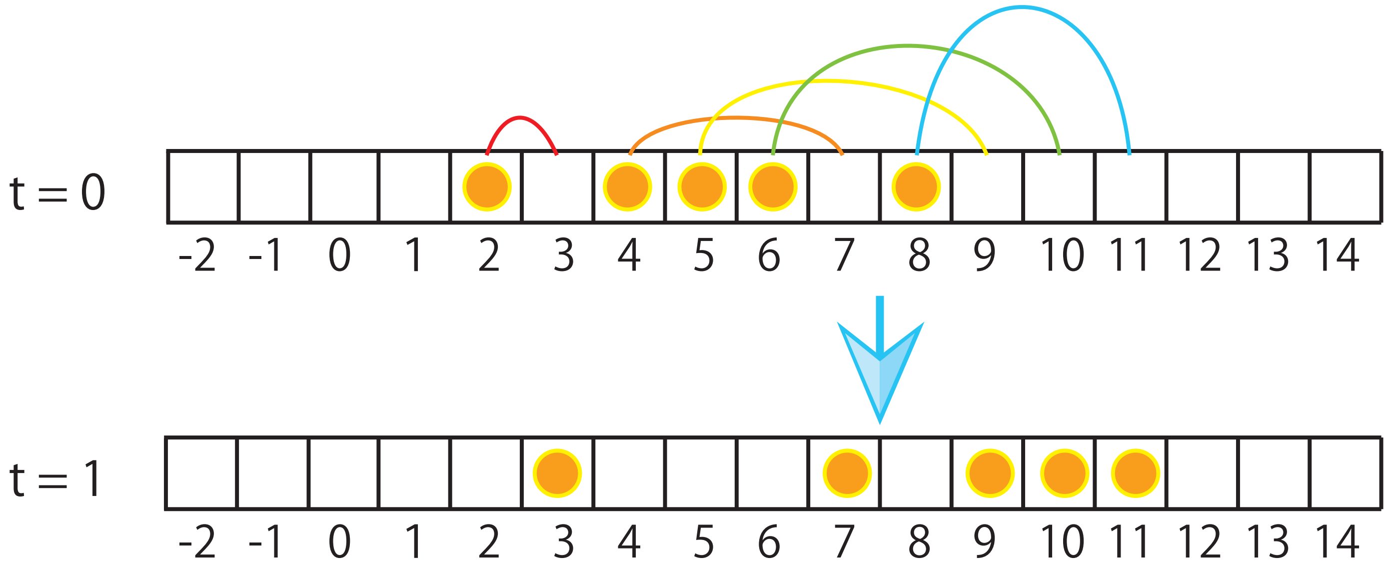
最近の研究テーマ２

離散可積分系を確率論の手法で解析する

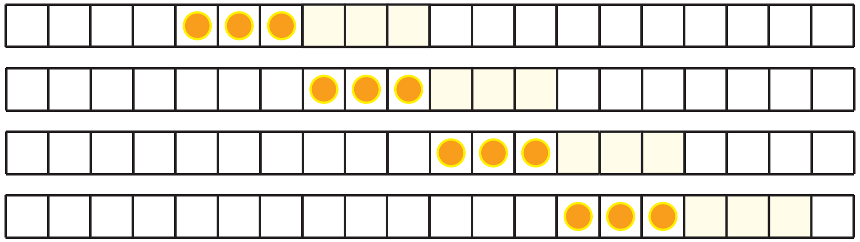
箱玉系との出会い

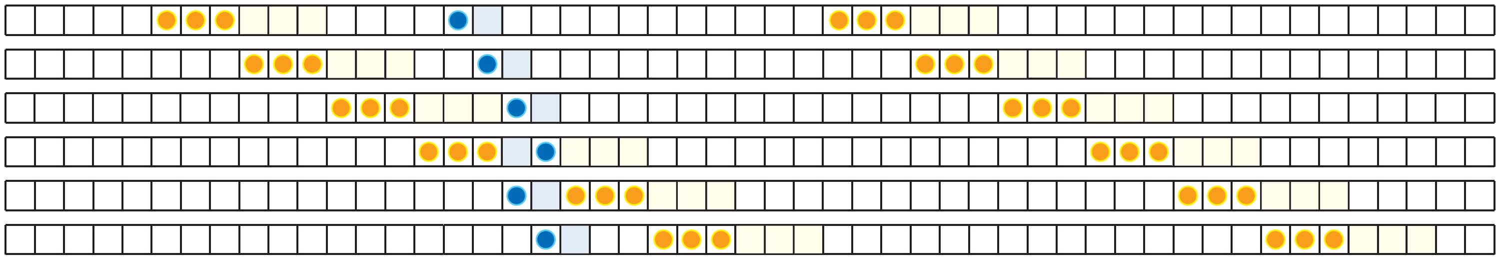
高橋大輔・薩摩順吉 両氏により1990年に導入された

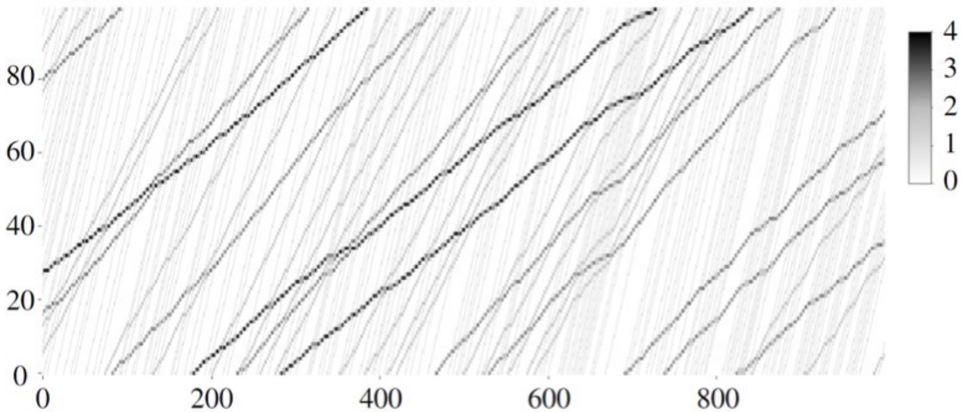
ソリトン的な振る舞いを持つ可積分なセルオートマトン



ソリトン







各サイズのソリトンの数
が時間発展で保存する

<u>無限の</u>マクロな物理量がある！
これまでのミクロモデルとは全く異なる

不思議な相互作用の連続で発展してきた研究

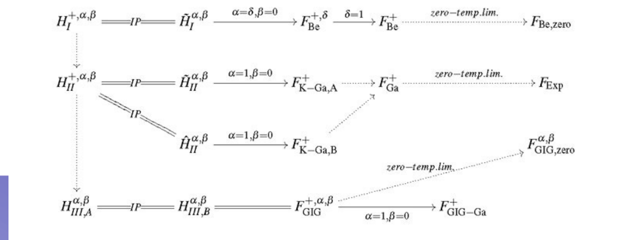
- 日本製鉄との共同研究をきっかけとした、可積分系の研究者、幾何学の研究者との継続的なディスカッション（2016年頃2月頃～）
- 「ランダムな初期条件を持つ箱玉系」に関する講演を聞く（2016年11月＠ Oberwolfach数学研究所）
- たまたま東京滞在中だった（それまで接点のなかった）確率論の研究者に箱玉系を紹介する（2017 年3 月）→ 次の日に大きな発見
- 箱玉系を含む離散可積分系の研究は日本が世界をリードしていて、日本語の文献が多数。<u>確率論的アプローチの研究が次々進む！</u>

不思議な相互作用の連続で発展してきた研究

- 可積分系を対象とした「一般化流体力学」についての講演を初めて聞く（2018年７月＠Montreal CRM）
- 箱玉系に対する一般化流体力学極限の論文を共同研究者と執筆（2020年2月）

> 可積分系に対する流体力学極限の厳密な証明は、
> 1970年代の先行研究に続いて２例目

- 「確率測度についての独立性保存則とYang-Baxter 写像」という**全く先行研究のないテーマ**に、**研究室インターンにきていた工学部の学生さんと**取り組み、予想外の結果を得る！(2022年10月)



最後に

- 研究は楽しい！面白さを共有できる仲間がいるともっと楽しい！
- 研究はうまくいかなくて辛い時もある。家族や友人との時間、教育活動、学生や国内外の研究仲間との交流などに支えられて、再び研究に向き合う力を充電できる！

- **意欲ある学生・ポスドクの参画、研究者の幅広い交流で、研究は加速する！**
- **事務職員や専門職員と研究者が一丸となれる環境が、研究力の鍵！**

「研究（者）」だけでは「よい研究」はできない！

いつも様々な形で支えてくださっている全ての方々に、感謝いたします！！