パソコンによる円周率
小数点以下５兆桁の計算

文部科学省　科学技術政策研究所シンポジウム
近未来への招待状
ナイスステップな研究者２０１０からのメッセージ

文部科学省　旧文部省庁舎6階　第2講堂
平成２３年６月３０日

旭松食品株式会社　情報システム課
近藤　茂

円周率とは

・円周率 = 円周 ÷ 直径 = 3.14・・・・・
・円周率 π の語源はギリシア語の周りを意味する
 $\pi \varepsilon \rho \iota \phi \varepsilon \rho \varepsilon \iota \alpha$ の頭文字をとったと思われる。
・円周率は無理数かつ超越数。
・円周率は小学校5年生の算数の教科書に登場する。
・円周率は幾何学、解析学、力学、統計学などに使用される
 公式に多く含まれている。

円周率を計算から求める

初めて円周率を計算から求めたのは、アルキメデスと言われる。直径1の円からその円周はその円の内接、外接する正多角形の周囲の長さの間にあると考え、正96角形まで計算して、

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

（3.14084･･･）　（3.14285･･･）

を見出し、円周率を3.14まで計算した。（紀元前3世紀）

ルドルフにおいては正2^62多角形まで計算して35桁まで求めた。（1621年）

π=3.1415926535 8979323846 2643383279 69399(35桁)

2^62=4,611,686,018,427,387,904

手計算による時代

17世紀になって、ニュートン、ライプニッツによる微分積分学が確立されると、無限級数を使用したπを求める式が発見されるようになった。マチンが以下の公式を発見し、100桁まで求めた。いままでの公式より収束が早い。－＞早く計算ができる。

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

シャンクスはこの式を使用して707桁（1874年）まで求めた。その後、1945年にファーガソンによる計算から、計算間違いが指摘され527桁までしか正しくない事がわかったが、70年以上この値が信用されていた。その後コンピュータの登場で計算桁数は飛躍的に伸びていった。

計算機による時代

年代	計算機を使用				
	計算者	コンピュータ	桁数	公式	計算時間
1949(S24)	ライトウィズナー他	ENIAC(真空管)	2,037	マチン	70h
1973(S48)	ジャン・ギュー他	CDC7600	1,001,250	ガウス	23h
1985(S60)	ウィリアム・ゴスパー	Symbolics3670	17,526,200	ラマヌジャン	−
1989(H01)	チュドノフスキー兄弟	IBM3090	1,011,196,691	ラマヌジャン他	−
1997(H09)	金田、高橋他	HITACHI SR2201	51,539,607,552	ルジャンドル	29h
1999(H11)	金田、高橋他	HITACHI SR8000	206,158,430,208	ルジャンドル	37h
2002(H14)	金田、後他	HITACHI SR8000/MPP	1,241,177,304,180	高野他	432h
2009(H21)	高橋	T2K(筑波大学)	2,576,980,377,524	ルジャンドル	29h
2009(H21)	ファブリスベラール	i7-940(自作パソコン)	2,699,999,990,000	チュドノフスキー	2760h

円周率の計算のきっかけ

学生時代（１９７４年）にFACOM２３０－２５用のFORTRANを学習する際、たまたま目に止まった雑誌それが「学習コンピュータ」だった。この中に円周率を1000桁求めるプログラムが掲載されており、これを基に230で円周率を計算させた事が円周率の計算のきっかけとなった。以来いままで、37年間、この数字の並びを追い続けてきた、、、多分これからも追い続けていくと思う。

なぜ5兆桁になったか

・2009年４月、筑波大学のスーパコンピュータで記録される。
　計算桁数は約２兆５千億桁。
・2009年１２月、Fabriceのパソコンで記録される。
　計算桁数は約２兆７千億桁。
・2010年４月に自身が１兆桁の計算に成功。

最初10兆桁を考えたが、ハードウェアが足りない、計算時間が半年以上等により断念、結果、当時の記録の約2倍の５兆桁を挑戦する桁数と決めた。

5兆桁の計算にこだわった事

　個人の所有する1台のパソコンを使用して、その持っている計算能力を最大限利用して計算を行う。

５兆桁の計算履歴

計算は２０１０年５月４日に開始し、９１日後の８月３日に終了しました。その間に計算が停止したのは1回です。原因については以下の理由により詳しくわかりませんでした。

・別のマシンで再現できなかった事。

・チェックポイントからの再計算で同じ場所を問題なく通過してしまった事。

昨年の猛暑にも耐えて、全ての部品が長期間連続稼働で故障せずに動作してくれた事は、幸運だったと思っています。

主計算に使用した公式

【チュドノフスキーの公式】

$$\pi = 426880\sqrt{10005}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n)}{(3n!)(n!)^3 640320^{3n}}\right)^{-1}$$

n=0 : 3.1415926535 8973420766 8453591578 2983407622 3326091570 6590894145 ･･･

n=1 : 3.1415926535 8979323846 2643383587 3506884758 6634599637 4315654905 ･･･

n=2 : 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6767885484 6287912727･･･

n=3 : 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820984947･･･

nを１つ進めるごとに約１４桁精度が上がる。
nを352,568,346,744まで進めると精度が5兆桁に達する。

計算の高速化１

大きな桁の計算に関しての高速化について説明します。

円周率の計算において、多桁x多桁の乗算がキーになります。
筆算のように乗算を行うと、桁数の２乗に比例した計算時間がかかります。計算時間の短縮にはいろいろな手法がありますが、FFTを利用して計算する事で高速化を図ります。C＝AxBの計算の概要を示します。

1. A, Bの各桁を数列と見なしFFT変換を行う。変換後の値をAk,Bkとする。
2. 項毎にAkとBkを乗算し、Ckを得る。
3. Ckを逆FFT変換し、桁上げ処理をすればCが得られる。

※FFT(Fast Fourier Transform)は離散 Fourier 変換を高速に行う方法です。計算工数がO(n^2)からO(nlogn)に減少する。

計算の高速化2

チュドノフスキーの公式のΣの部分はbinary splittingの手法を使用して計算します。最後の一項になるまでは除算抜きで計算できます。

$$S_L = \sum_{n=0}^{L/2-1} \frac{\prod_{l=0}^{n-1} B_{2l} B_{2l+1}}{\prod_{l=0}^{n} C_{2l} C_{2l+1}} \left(A_{2n} C_{2n+1} + B_{2n} A_{2n+1} \right)$$

An = 13591409 + 545140134n

Bn = − (2n + 1) (6n + 1) (6n + 5)

Cn = 10939058860032000n^3

n=2 : 3.141592653589793238462643383587350688475866345996374315654905

n=4 : 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820984947

n=7 : 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
5923078164062862089986280348253421170657

残り1項まで計算を進め、円周率は最終的に、

$$\pi = \sqrt{10005} \times \frac{C_0}{A_0}$$

で求めます。

計算の高速化3

$\sqrt{10005}$及び$\dfrac{C_0}{A_0}$の計算はニュートン法を使用して計算します。

【平方根】

平方根はその逆数を計算し、元の数を乗算して平方根を計算する。

C = 1 ／ SQR（A）、 SQR(A) = A＊(1 / SQR(A))

漸化式 $a_{n+1} = a_n + 0.5 * a_n * (1 - A * a_n^2)$

A = 2、An = 0.7として、（計算を繰り返す毎に精度が2倍になっていく -> 収束が早い）

1 : 0.707
2 : 0.70710675 7
3 : 0.7071067811 8654628345 1619907
4 : 0.7071067811 8654752440 0844362101 5823014625 2648639901 0579459709
5 : 0.7071067811 8654752440 0844362104 8490392848 3593768847 4036588317

【除算】

除算は除数の逆数を求めてその値と被除数を乗算して求める。

C = A ÷ B = A ＊ （1 ／ B）

漸化式 $a_{n+1} = a_n * (2 - A * a_n)$

各計算の検証

いくつかある中の代表例として、

１．計算する上位桁に0を付けて計算する。例えば12x34なら0012x0034として計算し、計算結果の上位桁に予想される数の0があるか確認する。

12x34=0012x0034=00000408

２．計算結果の余りと、計算する値の余りを計算結果の演算と同じ計算をしてその余りと等しい事を確認する。余りの計算に使用する除数は素数を使用する。

(A + B) mod p=((A mod p) + (B mod p)) mod p

(A − B) mod p=((A mod p) − (B mod p)) mod p

(A x B) mod p=((A mod p) x (B mod p)) mod p

pは(2^61)−1=2,305,843,009,213,693,951（素数）

検証計算に使用した公式

【BBP(Bailey-Borwein-Plouffe)の公式】

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

【Fabrice Bellardの公式】

$$\pi = \frac{1}{2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1024^n} \left(-\frac{2^5}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{2^8}{10n+1} - \frac{2^6}{10n+3} - \frac{2^2}{10n+5} - \frac{2^2}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right)$$

上記の公式は収束は早くないが、2進展開におけるそれまでの桁を計算しなくても目的の桁を計算できる。

計算結果の検証

１．１６進の計算結果の検証

10進5兆桁に相当する16進4,152,410,118,610桁の手前32桁値と、ピンポイントで任意の桁が計算ができるBBPとBellardの両式で計算した32桁の値が一致しているかを確認した。

E4 7C587FB338 E55505A1930 5CCB829FC8 : 4,152,410,118,610

２．１６進－１０進変換の検証

以下の式を計算し、一致する事を確認した。

$A = \mathrm{Floor}(\pi_{10} * 10^N) \bmod p$

$B = \mathrm{Floor}(\pi_{16} * 10^N) \bmod p$

A = Bになる事を確認する。

π_{10}は10進の円周率

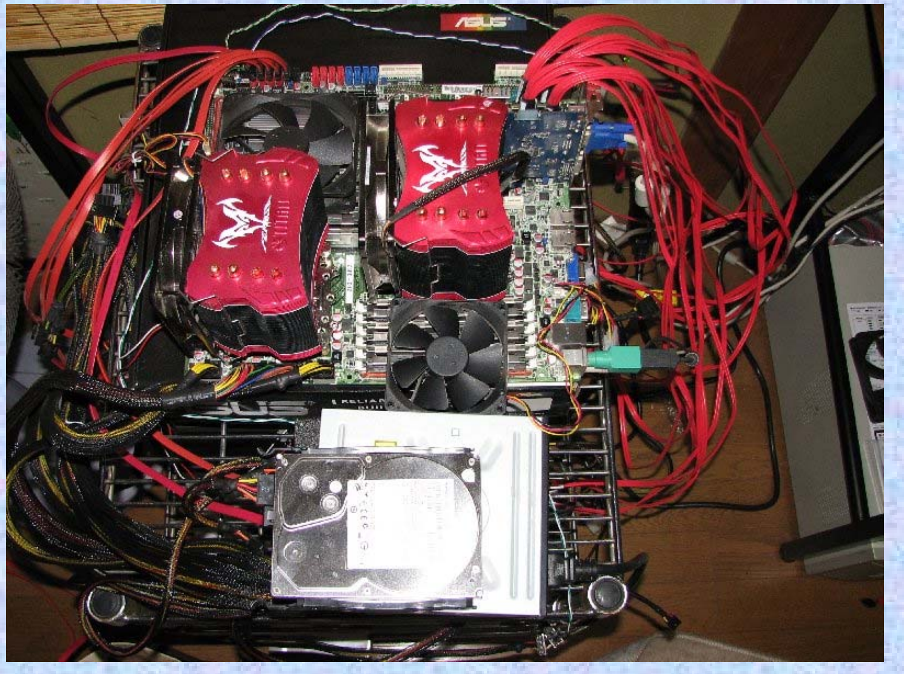
π_{16}は16進の円周率

N = 5,000,000,000,000(10進の計算桁数)

P = 64ビットの素数

パソコンの諸元

- CPU : X5680(6core,3.33GHz) x 2
- Memory : 96GB(8GBx12)
- Motherboard : Z8PE-D12
- OS : Windows Server 2008 R2
- VGA:マザーボード内蔵
- HDD:
  - 1TB(起動用)、1TB x 1
  - 6TB(結果保存)、2TB x 3
  - 24TB(計算用)、2TB x 16



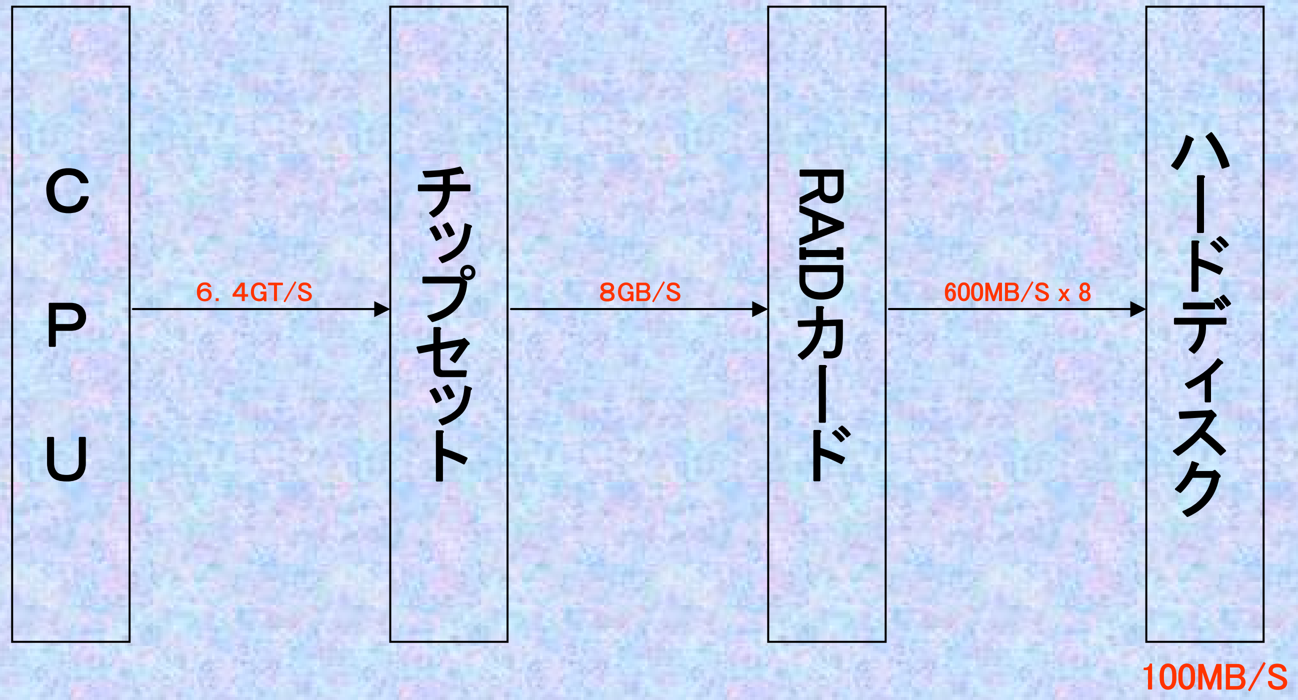
ハードウェアの選択１

限られた予算、入手先などから部品を集めテストをして現在の仕様になりました。

１．CPU
　２個のCPUが連携できる事からXeonを選択。
２．メモリ
　メモリ容量をできる限り増やす為、１枚当たり8GBの容量を採用。
３．マザーボード
　速度と安定性の両方を鑑みZ8PE-D12とした。
４．OS
　ディスクアクセスの早い、Server版のOSとした。

ハードウェアの選択2

5兆桁の計算に必要なメモリは24TBです。PCではこの容量のメモリは搭載できません。ハードディスクとRaidカードの選択は重要です。



ハードウェアの選択3

５．ハードディスク

・メーカや同じ型式でもそのロットを変えて安定度と速度の両面から総合評価をしてST32000641ASを選んだ。

・接続台数についてもテストし、16台が最適と判断した。

６．Raidカード

ハードディスクを８台接続した場合でも、台数に比例した転送速度を引き出せた9260−8iを選んだ。

ハードディスクのアクセス速度

ハードディスクのアクセス速度は、メモリに比較すると相当遅い。また、機械的動作を伴うので、ランダムアクセスは特に遅い。と言うことから、この速度が計算時間に大きな影響を与える。

アクセス速度を上げる為に．．．

1．ドライブは複数同時にアクセスする方法。

2．OSやRaidに頼らないアクセス方法。

５兆桁の計算結果

・５兆桁の手前１００桁は以下の通り

2597691971 6538537682 7963082950 0909387733 3987211875
6399906735 0873400641 7497120374 4023826421 9484283852

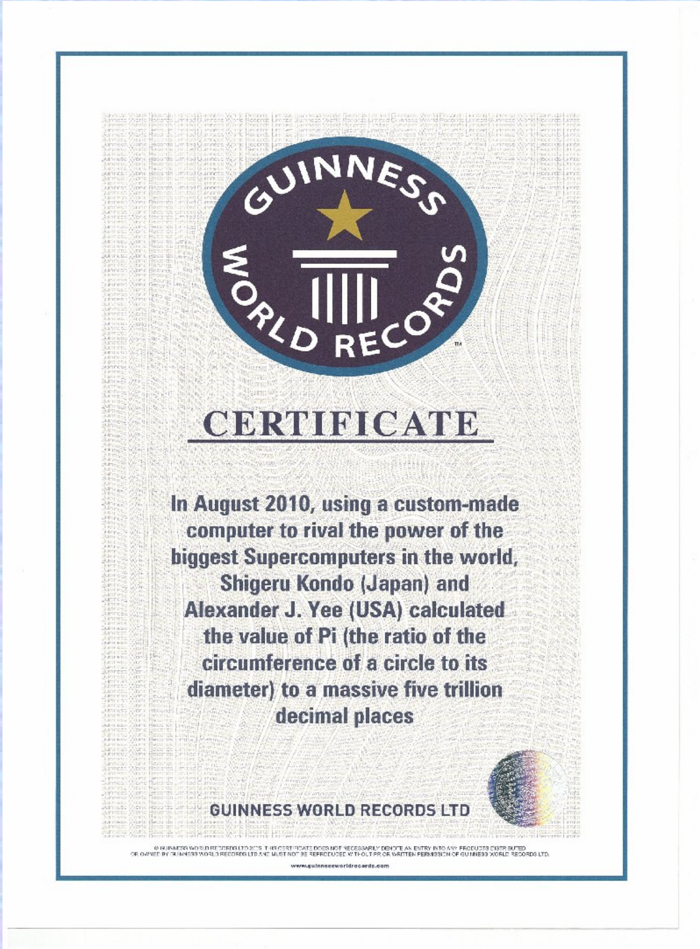
・０から９までの出現頻度は、

0 : 499,998,976,328
1 : 499,999,966,055
2 : 500,000,705,108
3 : 500,000,151,332
4 : 500,000,268,680
5 : 499,999,494,448
6 : 499,998,936,471
7 : 500,000,004,756
8 : 500,001,218,003
9 : 500,000,278,819

円周率の値の並びは乱数のように見える。。。

ギネスブックへの申請

2010年12月1日に申請を行い、2011年1月13日付で認定書をもらいました。



ご静聴ありがとうございました。